VITT EMANUELE

BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE
12
21 B
4 17
K
528
Ex Bibliotheca
majori Coll. Rom.
Societ. Jesu
54.3.33
54.
f
90.

PROBLEMATA

[illegible]

Lugduni Batavorum

[illegible]

A PAVLO CASATI

SOCIETATIS IESV

[illegible]

14-23.A.15

[illegible]

[illegible]

PROBLEMATA

Ab Anonymo Geometra
Lugduni Batauorum
propoſita

A PAVLO CASATO
SOCIETATIS IESV
PLACENTINO
Parmæ explicata.

Bib: Sec: Coll: Rom: Soc: Jesu

BIBLIOTECA NAZ. VITTORIO EMANUELE ROMA

PARMÆ, M. DC. LXXV.
Apud Petrum à Frate,& Galeatium Roſatum.

Superiorum Permiſſu.

GEOMETRA

Poſt Tabulam latens, quæ ſequuntur Problemata Matheſeos Profeſſoribus reſoluenda proponit.

1 DAta Differentia Segmentorum Baſeos, vnà cum Ratione, quam habet alterutrum laterum circa verticem ad differentiam eorumdem, datoque alterutro angulorum ad Baſim, reperire triangulum.

2 Data Differentia Segmentorum baſeos; vnà cum Ratione, quam habet laterum aggregatum circa verticem ad lineam aliquam datam, datoque alterutro angulorum ad baſim, reperire triangulum.

3 Data Differentia Segmentorum Baſeos, vnà cum Ratione, quam habet aggregatum laterum circa verticem recta data multatum ad rectam aliquam itidem datam, datoque alterutro angulorum ad baſim, reperire triangulum.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

4 Data Differentia Segmentorum Baſeos vnà cum Ratione, quam habet differentia laterum circa verticem ad alterutrum laterum, datoque alterutro angulorum ad baſim, reperire triangulum.

+ conuertendo

5 Data Differentia Segmentorum Baſeos, vnà cum Ratione, quam habet laterum aggregatum circa verticem ad alterutrum è lateribus, datoque alterutro angulorum ad baſim, reperire triangulum.

+ diuidendo

6 Data Differentia Segmentorum Baſeos, vnà cum Ratione, quam habet rectangulum ſub lateribus circa verticem ad datum planum, datoque alterutro angulorum ad baſim, reperire triangulum.

7 Data Differentia Segmentorum Baſeos, vnà cum Ratione, quam habet quadratum vnius è lateribus circa verticem auctum rectangulo ſub ijſdem; vel plano vtcumque eiusdem multiplici, ad quadratum alterius lateris, datoque alterutro angulorum ad baſim, reperire triangulum.

8 Data Differentia Segmentorum Baſeos, vnà cum Ratione, quam habet quadratum lateris alterutrius circa verticem ad rectangulum ſub aggregato ex differentia prædicta, & latere minori, & ſub eadem quoque differentia, datoque alterutro angulorum ad baſim, reperire triangulum.

9

9 Data Differentia Segmentorum Baſeos, vnà cum Ratione, quam habet quadratum aggregati ex prædicta Differentia, & latere alterutro circa verticem ad exceſſum, quo idem ſuperat quadratum prædictæ differentiæ, datoque alterutro angulorum ad baſim, reperire triangulum.

10 Data Differentia Segmentorum Baſeos, vnà cum Ratione, quam habet aliquota pars rectanguli ſub lateribus circa verticem datum planum aſſumens ad aliud datum itidem planum, datoque alterutro angulorum ad Baſim, reperire triangulum.

11 Data Differentia Segmentorum Baſeos, vnà cum Ratione; quam habet aggregatum quadratorum è lateribus circa verticem ad datum planum, datoq; alterutro angulorum ad baſim, reperire triangulum.

12 Data Differentia Segmentorum Baſeos, vnà cum Ratione, quam habet quadratum aggregati laterum circa verticem aſſumens datum planum ad datum itidem planum, datoque alterutro angulorum ad baſim, reperire triangulum.

LVGDVNI BATAV. M.DC.LXXV.
Ex officina Iohannis Elzeuir Academiæ Typographi.

NVperrimè meas ad manus deuenere duodecim hęc Problemata Lugduno Batauorũ ad Chriſtophorum Sadlerum Auguſtam Vindelicorum tranſmiſſa, vt ea Germanis, atque Italis Matheſeos Studioſis communicaret. Hæc ille Florentiam deſtinauit Antonio Magliabechi; à quo Piſas ad Alexandrum Marchettum in celeberrima illa Academia Ordinarium Philoſophiæ Profeſſorem directa ſubiere ingenij incudem, & ſex priora ab eodem reſoluta publicam lucem Typis impreſſa viderunt: Eorumque exemplar cùm ad me ineunte hoc Iunio, quo exeunte huic lucubratiunculæ finem impono, veniſſet, eiusdem CL. V. Antonij Magliabechi humanitate, illicò excitatus ſum, vt ſi qua nanciſci poſſem vacua horarum reſegmina, genio indulgerem huiuſmodi Problematum ſolutionem quæritans. Quid præſtiterim, quàm breuiſſimè potero, exponam;& claritati inſeruiens, eandem illam methodum, qua Analyſtarum more vſus ſum in aliquibus lineis inueniendis, hic adhibebo: neque enim artem velando arti pretium facere animus eſt; ſed vtilius accidet Matheſeos Candidatis, ſi his quaſi exemplis manuducantur ad inuenienda ea, quæ Quæſtioni ſubijciuntur.

Vnum

Vnum eſt,quod initio monitum te velim, Amice Lector; me ſcilicet non ſatis probare poſſe Anonymi Geometræ formam, qua ſua hæc Problemata propoſuit abſque vlla præuia explicatione, cuius ope ſufficienter determinata examinari poſſent. Cum enim in omnibus ponatur baſis in ſegmenta inæqualia diſtingui, incertum eſt,an illa Segmẽtorum diſtinctio omninò ex arbitratu pendeat,an verò certam aliquam legem ſubeat. Quod ſi baſim pro libito in partes diſtinctam velit à linea in baſim deſcendente ex angulo verticali, quem ſine lege diuidat inæqualiter, & ad angulos ſine vlla lege inæquales incidente in baſim;quis non videat quàm incerta res ſit, nec vllam certam ſolutionem recipiat?

Sin autem Angulus verticalis à linea in baſim deſcendente bifariam in angulos æquales diuidatur,ea eſt Segmentorum baſis ratio,quæ inter ipſa latera intercedit, ex 3.lib.6.Elem. nec iam per plura vagandi locus patet, cum certis quibuſdam terminis Problema coerceatur.

Verùm non hanc fuiſſe Anonymi Geometræ mentem mihi facilè perſuadeo, quia hæc anguli verticalis in partes æquales diuiſio raro vſurpatur; cum tamen frequentiſſima ſit hy-

 pothesis,

potheſis,qua trianguli altitudo conſideratur; hæc autem definitur à linea,quæ in baſim ad perpendiculum cadit ab angulo verticali. Quare iuxta hanc hypotheſim ea baſis ſegmenta ponentem, quæ à perpendiculo in illam cadente definiuntur; & inæqualia ſunt (quotieſcumque triangulum Iſoſceles non fuerit) propoſita Problemata conabor explicare. Id quod ipſo ſtatim initio animaduertere operæ pretium fuit.

Cæterum à Geometra illo aſſumptum ſuſpicor certum aliquod triangulum notæ menſuræ; illudque omnes in partes verſans addendo, demendo &c. Rationeſque diuerſas inueniens hæc Problemata effinxit, quæ ſoluenda proponeret: ſed vtrum hæc ille ſoluerit ex hiſce datis,ignoro.

PROBLEMA I.

Data Differentia Segmentorum baſeos (Z) vna cum Ratione, quam habet alterutrum laterum circa verticem ad differentiam eorumdem (S ad R, aut S † R ad R) datoque alterutro angulorum ad baſim, reperire triangulum.

QVoniam Ratio lateris minoris ad laterum differentiam eſt S ad R, Ratio lateris minoris

minoris ad latus maius eſt S ad S † R.

Sit datus maior angulus B A C adiacens lateri minori; Super data ad libitum recta A C deſcribe Segmentum circuli capiens angulum æqualem dato angulo, ex 33. lib. 3. Elem. quod ſit A C D. Tum fiat, vt S † R ad S; ita C A, ad C D, quæ per 1. lib. 4. elem. in dato circulo accommodetur; & ducta recta A D; angulus C D A æqualis eſt dato angulo B A C. Quare triangulum A C D habens vnum angulum D æqualem vni angulo trianguli quæſiti, & latera A C, & C D proportionalia lateribus quæſiti trianguli, per 7. lib. 6. Elem. ſimile eſt quæſito Triangulo.

Facto igitur C centro, & interuallo C D, deſcribatur circulus, qui ſecans reliquum latus, & baſim, determinabit E A differentiam laterum, & F A differentiam Segmentorum baſis factorum à perpendiculari C G.

Iam verò cùm data differentia ſit Z, fiat vt F A differentia ad A D baſim, ita Z hoc eſt I O ad baſim H I; & vt A D ad D C, ita H I ad H L; ſitque angulus H æqualis dato angulo; quare ſi ducatur recta L I, erit triangulum H L I ex 6. lib. 6. Elem. ſimile triangulo A D C; & quia I O æqualis eſt datæ Z, totum triangulum H L I illud eſt, quod quæritur.

Quod

Quod ſi datus minor angulus adiaceret lateri maiori, fiat ſimiliter ſegmentum capiens datum angulum B A K, & vt S ad S † R, ita A K chorda ſegmenti ad latus adijciendum K D, & erit pariter triangulum A K D ſimile triangulo quæſito, quod eadem methodo inuenitur iuxta menſuram homogeneam datæ differentiæ Z, ſcilicet H L I, in quo latus H L ad laterum differentiam N I, eſt vt S ad R, & angulus H vel I eſt datus, & ſegmentorum baſis H M, & M I, differentia eſt O I æqualis datæ differentiæ Z. Quod erat faciendum.

PROBLEMA II.

Data(Z) Differentia Segmentorum Baſeos, vnà cum Ratione(R ad S) quam habet laterum aggregatum circa verticem ad lineam aliquam datam (D), datoque alterutro angulorum ad baſim, reperire triangulum.

Fiat vt S ad R ita D linea data ad aliam lineam, nempe A B, & hoc eſt aggregatum laterum quæſiti trianguli; quæ diſtinguere oportet.

Si datus angulus adhæreat lateri maiori, conſtituatur ad A, & fit B A C. Tum datæ Z aſ-

fumatur

ſumatur æqualis A E; & ducta E B diuidatur bifariam à perpendiculari F G, quæ occurrit rectæ A B in G. Ducatur E G, & per 4. lib. 1. Elem. triangula E F G, & B F G rectâgula ad F habent baſes B G, & E G æquales. Propterea facto centro G, interuallo G B deſcribatur circulus, qui tranſibit per E, & ſecabit indefinitam A C in I. Ducta itaque linea G I, erit triangulum A G I quod quæritur: eſt enim A G I aggregatum laterum, quod eſt æquale ipſi A B, atque adeò per 7. lib. 5. Elem. habet ad datam lineam D, rationem datam R ad S, & angulus A eſt datus, & A E differentia Segmentorum A H, & I H, eſt aſſumpta æqualis datæ Z.

Quod ſi datus angulus adhæreat lateri minori, data eadem Z differentia Segmentorum, & inuento aggregato laterum eadē rectâ A B, ducatur indefinitè recta M C, in qua ſumatur M E æqualis datæ differentiæ Z. Tum ad E ſtatuatur angulus C E K æqualis dato angulo; ſit autem E K æqualis inuento laterum aggregato, quod erat A B. Iungantur extremitates recta M K: deinde angulo M K E fiat æqualis angulus K M G (eſt autem aggregatum laterum maius tota baſi quæſiti trianguli per 20. lib. 1. Elem. ac proinde multò maius quam baſis pars M E, adeoque

adeòque K E ſubtendit maiorem angulum E M K; ex quo fit rectam M G cadere in G inter E, & K) & erit per 6.lib.1.Elem. M G æqualis ipſi G K; & addita communi G E erit M G E æqualis ipſi E K aggregato laterum.

Demum centro G interuallo G E deſcribatur circulus ſecans indefinitam M G in I; & ducta recta G I dabit triangulum M G I, quod quæritur, in quo G I æqualis ipſi G E ductæ ex eodem centro, ſi addatur communis G M dabit M G I aggregatum laterum æquale ipſi M G E, hoc eſt E K, hoc eſt A B; angulus G I E per 5. lib. 1. Elem. æqualis eſt angulo G E I, hoc eſt angulo dato; Demum M E differentia Segmentorum baſis factorum à perpendiculo cadente ex G in baſim eſt data Z: & M G I ad datam lineam D habet Rationem datam R ad S. Quod erat faciendum &c.

PROBLEMA III.

Data (Z) Differentia Segmentorum Baſeos, vnà cum Ratione (R ad S) quam habet aggregatum laterum circa verticem rectâ (B) datâ multatum, ad rectam aliquam (D) itidem datam, datoque alterutro angulorum ad Baſim, reperire triangulum.

Pona-

PONatur aggregatum laterum Algebricè A: igitur A —— B, ad D eſt vt R ad S. Ergò R in D æquatur A in S —— B in S; & facta Antitheſi R in D † B in S æquatur A in S. Inueniatur linea, cuius quadratum æquale ſit rectangulis R in D † B in S. (nimirum inter R, & D inueniatur media proportionalis K, atque inter S & B media L, quæ ad angulum rectum conſtitutæ iungantur rectà X, & eſt X quadratum æquale K quadr. † L Quadr.) & eſt æquatio inter A in S, atque X quadr.

Igitur reuocata ad Analogiam æquatione eſt vt S ad X, ita X ad A aggregatum laterum, quæ ſit recta A I; ex qua ſi auferatur data recta B, hoc eſt A C, reſiduum C I ad datam rectam D habet datam Rationem R ad S. Iam itaque dato A I aggregato laterum, data Z differentia Segmentorum baſis, datoque alterutro angulorum ad baſim, facile eſt exhibere triangulum quæſitum ex dictis problem. 2. nota enim Ratio aggregati laterum ad lineam D datam.

PRO-

PROBLEMA IV.

Data Differentia Segmentorum Baſeos, vnà cum Ratione, quam habet differentia laterum circa verticem ad alterutrum laterum, datoque alterutro angulorum ad baſim, reperire triangulum.

SOlutum eſt hoc Problema ex primo; quia ſi datur hìc Ratio differentiæ laterum ad alterutrum latus, datur conuertendo etiam Ratio alterutrius lateris ad differentiam laterum, vt in primo.

PROBLEMA V.

Data (Z) differentia Segmentorum Baſeos, vnà cum Ratione (R ad S), quam habet aggregatum laterum circa verticem ad alterutrum è lateribus, datoque alterutro angulorum ad Baſim, reperire triangulum.

QVia latera inæqualia ſunt (nam & ſegmẽta baſis inæqualia ponuntur) conſtat in laterum aggregato contineri latus minus bis, & præterea differentiam laterum. Si igitur aggregatum ad latus minus ſit vt R ad S, auferatur S ex R bis, ſcilicet T V,

& V X, remanetque R X, quæ exhibet differentiam laterum. Quapropter data eſt Ratio lateris maioris ad differentiam laterum, nimirum R V ad R X, & ratio lateris minoris ad laterum differẽtiam, ſcilicet S ad R X. Soluitur ergo Problema hoc, vt in primo ex data Ratione alterutrius lateris ad differentiam laterum.

Quod ſi Ratio data R ad S eſſet aggregati ad latus maius, auferatur S ex R, & remanet O I, quæ exhibet latus minus; quod iterum demptum ex maiore relinquit differentiam R E.

PROBLEMA VI.

Data (Z) differentia Segmentorum Baſeos, vnà cum Ratione (R ad S) quam habet rectangulum ſub lateribus circa verticem ad datum planum (O), datoque alterutro angulorum ad baſim, reperire triangulum.

PRimùm inueniatur linea potens quadratum æquale plano dato O, & ſit recta M. Deinde vt S ad R, ita M fiat ad N. At Quadrata M & N, ſunt in duplicata ratione M ad N; propterea ſit media proportionalis L; & erit quadratum M ad Quadratum L, vt M ad N, hoc eſt, vt S ad R. Et quoniam

Qua-

Quadratum ipſius M ex cōſtructione æquale eſt dato plano O, etiam quadratum ipſius L æquale erit rectangulo ſub lateribus, inter quæ latera ipſa linea L eſt media proportionalis; atque adeò aggregatum laterum maius eſt quàm ipſa L bis ſumpta. ex 25. lib. 5. Elem.

Et quidem ſi nota eſſet laterum differentia, aut ſaltem Ratio illius ad Z, facile eſſet inuenire laterum aggregatum; nam quadratum differentiæ laterum adiunctum quadruplo rectangulo ſub lateribus æquale eſt quadrato aggregati laterum (vt colligitur ex theoremate propoſit. 13. in Notis prioribus ad Logiſt. Spec. Vietæ) ac propterea linea L duplicata dans quadratum æquale quadruplo rectangulo ſub lateribus ſi perpendicularis ſtatueretur ad differentiam laterum, hypothenuſa daret aggregatum laterum. Datis autem laterum aggregato, aut eorum differentia, & rectangulo ſub lateribus, facile eſt ipſa latera inuenire.

Sed hic inter infinitas laterum combinationes, quorum media proportionalis ſit L, nulla habetur determinatio niſi ab angulo, & longitudine datæ lineæ Z.

Quare ſi datus angulus opponatur lateri maiori, ducatur recta I H, quæ ſit dupla inuentæ

mediæ

mediæ L: diuidatur bifariam in G, ex quo puncto perpendicularis G S ducatur: & in G cõſtituatur angulus A G I dato angulo ęqualis, & aſſumatur G D æqualis datæ differentiæ Z. Tum in G S aſſumatur punctum (quod ſit O) quo facto centro deſcribatur circulus per extremitates I & H tranſiens talis magnitudinis, vt rectam A G productam ita ſecet in A & B, vt ipſi G B æqualis ſit diſtãtia D A. nam G B, & G A, hoc eſt D A, & A F (facto ſcilicet centro A, interuallo A G deſcribitur circulus ſecans rectam I H in F, & eſt triangulum A F G Iſoſceles) ſunt latera quæſita, & eſt triangulum D A F. Quia ſcilicet, ex 35. lib. 3. Elem., rectangulũ ſub A G, & G B ęquale eſt rectangulo ſub I G, & G H, hoc eſt quadrato mediæ inuentæ L. At ipſi A G æqualis eſt A F, & ipſi A D æqualis eſt G B ex conſtructione; ergo rectangulum ſub D A, & A F lateribus eſt æquale quadrato mediæ L.; angulus A F D æqualis eſt ipſi A G F, per 5. lib. 1. Elem. hoc eſt angulo dato, & differentia Segmentorum eſt G D aſſumpta æqualis ipſi Z datæ. Igitur & rectangulum ſub lateribus habet ad datum planum O Rationem datam.

Simili vtendũ eſt methodo, ſi datus angulus opponatur minori lateri; nã in D cõſtituitur an-

gulus G D A dato angulo æqualis,& aſſumpto puncto O tanquam centro deſcribitur circulus ita ſecans in A rectam D A, vt deinde ex A ducta A B per G, ſit Segmentum G B æquale ipſi D A.

Non eſt tamen hic diſſimulandum operoſam valdè eſſe inuentionem Centri O, ſed illam pluribus hic explicare non vacat. *Vt* facilior eſſet Problematis ſolutio, aliquam aliam determinationem dari oporteret.

At verò dato vno angulorum, & adiacente latere, atque rectangulo ſub reliquis lateribus, ſi aut vnum angulum reperias, aut vnum latus, inuentum erit triangulum Arithmeticè per Trigonometriam. Nam ſi ad numeros reuocetur Ratio data R ad S, quæ ſit 20. ad 7, Planum autem datum ſit 49, erit rectangulum ſub lateribus 140. In triangulo igitur G A D data Z hoc eſt G D in menſura homogenea lateribus dati plani, eſt ex hypotheſi 6. latus A G ponatur Algebricè 1℞; ergò latus A D eſt $\frac{140}{1 ℞}$. Si itaque datus angulus lateri A D oppoſitus ſit gr. 60. notus eſt angulus A G D gr. 120. Quare vt $\frac{140}{1 ℞}$ ad 6. ita Sinus dati anguli 86602. ad 3711 $\frac{1}{2}$ ℞. Sinum anguli G A D.

Quia

Quia ergo per. 1 ℞ ducendus eſſet numerus $3711\frac{1}{2}$, accipio in Canone Sinuum Sinum auctum ad dexterã adhuc alia figura, & reperio eſſe Sinũ gr.21.m.47.ſec.10.quæ eſt mẽſura anguli G A D; remanet igitur angulus G D A gr.38.m.12.ſec.50. Quare ad D facto angulo G D A gr.38.m.13. habebitur punctũ A, atque adeò per tria puncta I A H deſcribetur circulus, cuius centrum eſt O.

Ideo autem inuentus numerus 3711. immutatus augetur vna figura, quia Radix 140, hoc eſt linea L inuẽta, eſt 11 $\frac{83}{100}$ Quod ſi prima figura radicis quadratæ eſſet 3, aut 2, numerus inuentus eſſet triplicandus, aut duplicandus; Si quidem Radix non excedat duas figuras. Non tamen per totam Radicem multiplicatur, quia inæqualia ſupponuntur latera; & latus minus trianguli quæſiti exceditur a Radice, quæ eſt inter latera medio loco proportionalis, Sed quia ignoratur, quænam ſit ſecunda figura addenda, vt numerus inuentus multiplicetur, propterea inuenitur aliquando Sinus paulo minor iuſto, & angulus aliquot minutis deficere poteſt.

Similiter datus angulus minori lateri A G oppoſitus ſit G D A g.38.m.13. & G D ſit 6. Ponatur A G 1 ℞, & fiat vt 1 ℞ ad 6, ita dati anguli

 ſinus

Sinus 61863 ad aliud: prouenit $\frac{37117}{1}\frac{8}{\text{℞}}$; atque adeò facta diuiſione per 1 ℞ demendo vltimam figuram, remanet 37117 Sinus anguli G A D gr. 21. m. 47. contẽptis ſecundis. Quare angulus reliquus D G A eſt gr. 120. & Linea huiuſmodi angulum in G conſtituens occurrit rectæ D A in A, vt priùs, & facile erit reperire punctum O ex dictis.

Fateor hic non haberi Geometricam præciſionem: ſed hanc methodum indicare placuit, quia ad Praxim ſufficit pro inueniendo centro circuli requiſiti in conſtructione Problematis. Inueniuntur autem latera in menſura homogenea differentiæ Z; ſi fiat vt 37117 ad 6, ita 61863 ad 10, & ita 86602 ad 14, quæ ſunt latera rectanguli 140.

PROBLEMA VII.

Data (Z) Differentia Segmentorum Baſeos, vnà cum Ratione (R ad S), quam habet Quadratum vnius è lateribus circa verticem auctum rectangulo ſub ijſdem, vel plano vtcumque multiplici, ad quadratum alterius, datoque alterutro angulorum ad Baſim, reperire triangulum.

Certum

Certum eſt rectangulum ſub lateribus eſſe medio loco proportionale inter ipſa quadrata laterum: igitur quadratum vnius lateris plus rectangulo ſub lateribus eſt aggregatum primæ, & ſecundæ proportionalis, & tertia eſt quadratum reliqui lateris: ergo etiam R ad S eſt ratio aggregati primæ, & ſecundæ, ad S tertiã. Quare prima ſit R – A, ſecunda ſit A, tertia erit S. Igitur R in S – A in S æquatur A quadrato: & facta Antitheſi, A quadratum † A in S ęquatur S in R. Atqui inter R & S inuenta V media proportionali, eſt V quadratum ęquale S in R: Igitur V quadrato ſi addatur quadratum ſemiſſis coëfficientis S, habetur quadratum, cuius latus eſt A † $\frac{1}{2}$ S.

Fiat itaque triangulum, cuius Baſis H B æqualis ſit lineæ V, perpendiculum C H æquale ſemiſſi ipſius S, nam duobus quadratis baſis & perpendiculi, æquale eſt quadratum hypothenuſæ C B, cuius quadrati latus eſt A † $\frac{1}{2}$ S. Ablata igitur C D æquali ipſi C H, hoc eſt ipſi $\frac{1}{2}$ S, remanet D B ęqualis ipſi A ſecũdæ proportionali: & ablata D B ex R, remanet R D prima, D B ſecunda, & S eſt tertia proportionalis. Quare vnius lateris quadratũ

 ad

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITT. EMANUELE

ad quadratum reliqui lateris eſt vt R D ad S: & quoniam Ratio laterum eſt ſubduplicata Rationis quadratorum, Ratio laterum quæſiti trianguli eſt vt R D ad D B.

Porrò nota Ratione laterum innoteſcit Ratio differentiæ illorum ad alterutrum latus, & ſic per Problema primum innoteſcit quæſitum triangulum.

Quod ſi quadratum lateris intelligatur auctum rectangulo multiplici rectanguli ſub lateribus, eadem eſt methodus inueniendi Rationem laterum. Sit illud rectangulum quadruplex. Igitur ſunt tres continuè proportionales, prima R — 4 A, ſecunda A, tertia S. & demū æquatio erit inter R in S, atque A quadr. † 4 A in G; & addito quadrato ſemiſſis coëfficientis (hoc eſt quadrato ipſius 2 S) erit R in S † 4 S quadr. æquale quadrato, cuius latus eſt A † 2 S; & dempto 2 S remanet A.

Vt autem res hæc clarius etiam Tyronibus innoteſcat, explicetur in numeris. Sit in primo exemplo Ratio R ad S vt 10 ad 9; ergò R in S eſt 90; addatur $\frac{1}{4}$ S quadr. ſcilicet 20 $\frac{1}{4}$, ſumma eſt 110 $\frac{1}{4}$, hoc eſt $\frac{441}{4}$, cuius radix

eſt $\frac{21}{2}$, ex qua auferatur ſemiſſis ipſius S coëfficientis 9, nimirum 4 $\frac{1}{2}$, remanet A 6. Igitur R — A eſt 10 — 6, hoc eſt 4; atq; adeò Ratio quæſita laterum trianguli eſt 4 ad 6, hoc eſt 2 ad 3.

In ſecundo autem exemplo, vbi ponitur rectangulum quadruplex; ponamus Rationem R ad S eſſe vt 28 ad 9. Igitur R in S 252; ſemiſſis coëfficientis 4 S, eſt 2 S, hoc eſt 18, cuius quadratum 324: horum ſumma eſt quadratũ 576, cuius Radix eſt 24. ex qua dematur 2 S, hoc eſt 18, remanet A 6 media proportionalis quęſita. Quia igitur R — 4A eſt 28 — 24, prima eſt 4, A ſecunda eſt 6, tertia S eſt 9; & Ratio laterum trianguli quæſita eſt 2 ad 3, quadratum primi lateris 2 eſt 4, rectangulum ſub lateribus 2 & 3 eſt 6, cuius quadruplex eſt 24, additumque illi quadrato 4 fit 28; quadratum reliqui lateris 3 eſt 9. Vel retentis prioribus terminis, primi lateris 4 quadratum eſt 16, rectangulũ ſub 4 & 6 eſt 24, cuius quadruplex 96 additum 16 dat ſummam 112, quæ ad ſecundi lateris 6 quadratum 36 habet Rationem 112. ad 36, hoc eſt 28 ad 9.

PROBLEMA VIII.

Data (Z) Differentia Segmentorum Baſeos, vnà cum Ratione (R ad S), quam habet quadratum lateris alterutrius circa verticem ad rectangulum ſub aggregato ex differentia prædicta, & latere minori, & ſub eadem quoque differentia (Z), datoque alterutro angulorum ad Baſim, reperire triangulum.

SIt Antecedens Rationis Quadratũ lateris minoris, & ipſũ latus minus ponatur eſſe A: aggregatum ex illo, & data Z differentia, eſt Z † A, atque adeò rectangulum ſub hoc aggregato, & eadem differentia, eſt Z quadr. † Z in A: igitur A quadrat. ad Z quadrat. † Z in A eſt vt R ad S; & conuertendo, atque componendo Z quadr. † Z in A † A quadr. ad A quadr. eſt vt S † R ad R. Atqui tria illa plana ſingularia Z quadr., A in Z, A quadr. ſunt continuè proportionalia.

Eſt igitur Ratio ſummæ trium proportionalium ad tertiam: ergo etiam S † R eſt ſumma trium proportionalium, quarum tertia eſt R, & aggregatum primæ, atque ſecundæ eſt S. Sit itaque prima S − E ſecũda E, tertia R: demum æquatio eſt inter E quadr. † E in R, atque S in R.

Quare

Quare (methodo in ſuperiori Problemate indicata) inuenitur E, quæ eſt media inter S— E, & R. Igitur Z quadr. ad A quadr. eſt vt S— E ad R: & quoniam latera ſunt in ſubduplicata Ratione quadratorũ, erit Z ad A, vt S — E ad E. Fiat itaque vt S— E ad E, ita data Z ad aliud, & proueniet A latus quæſitum minus.

Inuento latere, vt fiat quęſitum triangulum, accipiatur B G in linea recta indefinita æqualis datæ Z, & ſi quidẽ minori lateri adiaceat angulus datus, fiat angulus F G A æqualis dato angulo, & ſit G A æqualis inuento lateri A; atque ducatur recta A B. Tum centro A, interuallo A G, deſcribatur circulus ſecans rectam B G productam in F, & ducta recta A F habetur quæſitum triangulum F A B, in quo angulus A F B (vt pote æqualis ipſi F G A per 5. lib. 1. Elem.) eſt datus, B G eſt Segmentorum Baſis differentia data, & quadratum A F æqualis inuentæ lineæ A ad rectangulum ſub G B, & G B plus F A eſt vt R ad S; vt patet relegendo veſtigia, per quæ inuentum eſt latus A.

Sin autẽ angulus datus adiaceat lateri maiori, conſtituatur illi angulo æqualis G B D: tum inuentæ lineæ A accipiatur æqualis G A, & ex G deſcripto arcu ſtatuatur ita, vt occurrat rectæ D B in A. Facto centro A, interual-

lo A G, deſcribatur circulus ſecans rectam B G productam in F, & ducta A F, erit F A B triangulum quæſitum.

Verùm ſi Ratio data R ad S ſit, quam habet quadratum lateris maioris ad idem rectangulum Z quadr. + Z in A, poſito A latere minori, ea, quæ data ſunt, non ſufficiunt ad determinanda latera, cum vtraque ſint prorſus ignota, vt conſtabit, ſi latus minus, ſit A, latus maius ſit E; quia vt E quadr. ad Z quadr. + Z in A, ità R ad S, & nunquam aliquid certum deprehenditur.

Quod ſi detur etiam Ratio ipſius Z ad differentiam laterum, quæ ſit linea B, iam habetur id, quod ſatis eſt ad inueniendum latus minus A, quo cognito Problema ſoluitur, vt dictum eſt. Eſſet enim latus maius A + B; igitur A quadr. + 2 B in A + B quadr. erit ad Z quad. + Z in A, vt R ad S, ex hypotheſi; ergo etiã A quadr. in S + 2 B in S in A + B quadr. in S æquatur Z quadr. in R + Z in A in R. Facta Antitheſi A quad. in S + 2 B in S in A — Z in A in R ęquatur Z quadr. in R — B quad. in S. Et per Paraboliſmum omnibus ad S applicatis, A quadr. + 2 B in A $-\frac{Z \text{ in } R}{S}$ in A ęquatur $\frac{Z \text{ quad. in } R}{S}$ — B quad. Quibus ſic ſtantibus coëfficiens 2 B $-\frac{Z \text{ in } R}{S}$ reducatur ad ſimpli-

cem

cem D, & Homogeneum comparationis fiat G planum: quare æquatio eſt inter A quad. + D in A, atque G planum: ex quo facile inuenitur A.

Quæ omnia, vt clariùs intelligantur, exponantur in numeris. Sit Z 6, differentia laterum B 4: Ratio quadrati lateris maioris ad rectangulum propoſitum in Problemate, ſit 49 ad 24. Igitur 2 B eſt 8, $\frac{Z \text{ in } R}{S}$ eſt $12\frac{1}{4}$; igitur coëfficiens D eſt $-4\frac{1}{4}$, cuius ſemiſſis $-2\frac{1}{8}$ quadratum eſt $+\frac{289}{64}$, hoc eſt $4\frac{33}{64}$ addendum homogeneo Comparationis. Quia verò $\frac{Z \text{ quad. in } R}{S}$ eſt $73\frac{1}{2}$, & demẽdũ eſt B quadr. hoc eſt 16, remanet G planũ $57\frac{1}{2}$, cui adde $\frac{1}{4}$ D quad. $4\frac{33}{64}$ fit $62\frac{1}{64}$ cuius radix eſt $7\frac{7}{8}$; ex qua demendo coëfficientis D ſemiſſe $-2\frac{1}{8}$ (mutata ſubductione in Additionem iuxta regulam Signorum) eſt A latus minus 10, & latus maius A + B eſt 14, cuius quadratum 196 ad rectangulum ſub Z, & Z + A 96 eſt vt 49 ad 24, ſcilicet vt R ad S.

Quod ſi rectangulum, de quo in Propoſitione, eſſet ſub aggregato ex latere maiori, & differentia Z, eadem eſſet methodus inueniendi

latus

latus maius ſicut dictum eſt de latere minori, cum eſſet Antecedens Rationis, & poneretur A latus maius quæſitum. Ratio autem R ad S non eſſet eadem, ſed alia, vt eſt manifeſtum.

PROBLEMA IX.

Data (Z) differentia Segmentorum Baſeos, vnà cum Ratione (R ad S), quam habet quadratum aggregati ex prædicta differentia (Z) & latere alterutro circa verticem, ad exceſſum, quo idem ſuperat Quadratum prędictæ differentiæ (Z), datoque alterutro angulorum ad baſim, reperire triangulum.

LAtus quæſitum ſit Algebricè A: aggregatum ex latere, & differentia Z eſt A † Z; cuius quadatũ A quadr. † 2 A in Z † Z quad. ad eius exceſſum ſupra Z quadr. hoc eſt ad A quadr, † 2 A in Z, eſt vt R ad S. Auferatur S ex R, & ſit reſiduum M. Igitur conuertendo, & diuidendo A quadr. † 2 A in Z ad Z quadr. eſt vt S ad M.

Quoniam verò tria plana ſingularia A quadr., A in Z, Z quadr. ſunt continuè proportionalia, erit illius aggregati quadratum, ſcilicet A quadr. † 2 A in Z † Z quadr. Summa trium proportionalium magnitudinum, ſecunda

da bis ſumpta: & exceſſus A quadr. † 2 A in Z eſt ſumma duarum ex illis ſecunda bis ſumpta, & Z quadrat. eſt tertia. Ergo ſimiliter data R eſt ſumma trium proportionalium ſecunda bis ſumptà, S eſt ſumma primæ, & bis ſecundæ, M verò eſt tertia. Igitur ponatur E ſecunda, & eſt prima trium continuè proportionalium S— 2 E, ſecunda E, tertia M. ac propterea E quadr. æquatur S in M— 2 E in M; & facta Antitheſi E quadr. † 2 E in M æquatur S in M. Quare innoteſcit E, quæ bis ablata ex S relinquit F. Sunt ergo tres continuè proportionales F, E, M: ac proinde F † 2 E † M eſt ad M, vt A quadr. † 2 A in Z † Z quadr. eſt ad Z quadr. Et demum vt F prima ad M tertiam, ita A quadr. ad Z quadr. & vt F prima ad E ſecundam, ita A ad Z.

Cum itaque data ſit Z, fiat vt E ad F, ita Z ad aliam lineam, & proueniet A latus quæſiti trianguli.

Sit A latus inuentum quæſiti trianguli latus minus: in recta H C ſumatur C B æqualis datæ differentiæ Z: tum in B facto centro, & interuallo ipſius lateris A inuenti, deſcribatur arcus G I. Deinde ſi datus angulus adiaceat minori lateri, ſit angulus H B G, & ex G ducatur G C, atque ex G centro, interuallo

Data Differentia Segmentorum Baſeos, vnà cum Ratione (R ad S), quam habet aliquota pars rectanguli ſub lateribus circa verticem datum planum (N quadr.) aſſumens, ad aliud itidem datum planum (M quadr.), datoque alterutro angulorum ad baſim, reperire triangulum.

DAta plana, quæcumq; illa ſint, reducantur ad quadrata, & plani aſſumpti latus ſit linea N, alterius verò latus ſit linea M, quarum linearum quadrata ſunt datis planis æqualia. Sit pars rectanguli ſub lateribus circa verticem quæſiti trianguli ex gr. Quinta: hæc eſt $\frac{1}{5}$ quadrati æqualis rectangulo ſub illis lateribus, quæ addita quadrato ipſius N habet ad M quadratum Rationem datam R ad S. Sit illa pars quinta A quadr. Igitur A quadr. † N quadr. ad M quadr. eſt vt R ad S. Quare A quadr. in S † N quadr. in S. æquatur M quadr. in R; & facta Antitheſi A quadr. in S æquatur M quadr. in R — N quadr. in S. & per Paraboliſmum facta communi applicatione ad S, A quadr. æquatur $\frac{\text{M quadr. in R}}{\text{S}}$ — N quadr.

Inue-

Inueniatur planum æquale $\frac{M\ quadr.in\ R}{S}$, & erit, ex 34.lib. 11. Elem. vt altitudo S ad altitudinem R, ita baſis M quadr. ad baſim, quæ ſit D quadr. Igitur Ratio S ad R eſt duplicata Rationis M ad D. Ergo inter S & R inuenta media proportionali V, eſt vt S ad V, ita M ad D. Quare æquatio eſt inter A quadr. atque D quadr. ——N quadr. Igitur in triangulo rectangulo, cuius hypotheniſa ſit D, latus alterum circa rectum ſit N, reliquum latus eſt A, cuius quadratum eſt $\frac{1}{5}$ rectanguli ſub lateribus quæſiti trianguli.

Iam itaque nota eſt A linea, inter quam, & lineam eiusdem quintuplam inueniatur media proportionalis T, cuius quadratum erit quintuplum ipſius A quadr. ac propterea æquale rectangulo ſub lateribus circa verticem trianguli. Eſt igitur nota Ratio rectanguli ſub lateribus circa verticem ad datum planum M quadr. (ſcilicet Ratio quam habet quadratum lineæ T ad quadratum lineæ M) ergo etiam ex Problemate 6. innoteſcit quæſitum triangulum.

PRO-

PROBLEMA XI.

Data(Z)differentia Segmentorum Baſeos, vnà cum Ratione(R ad S), quam habet aggregatum quadratorum è lateribus circa verticem ad datum planum(M quadr.)datoque alterutro angulorum ad baſim,reperire triangulum.

SIt linea M potens quadratum æquale dato plano cuicumque: & erit vt S ad R, ita M quadr. ad aliud, & ſit D quadr. ęquale aggregato quadratorum è lateribus. Ergo Ratio S ad R eſt duplicata Rationis M ad D: propterea inter S, & R ſtatuatur media proportionalis T, & fiat vt S ad T, ita M ad D, & eſt inuentæ lineæ D quadratum æquale aggregato quadratorum è lateribus quæſiti trianguli.

Quoniam verò plurimæ ſunt combinationes laterum, quorum quadrata ſimul ſumpta æquantur inuentæ lineæ D quadrato, hæc determinationem accipiunt ex angulo dato, & data Z differentia. Et quidem ſi quæſitum triangulum eſſe deberet rectangulum, res facilis eſſet: ducatur enim recta C B, in qua C A ſit æqualis differentiæ datæ Z, A B verò æqualis inuentæ lineæ D; & ſuper A B diametro deſcribatur ſemicirculus A E B,

Si datus angulus adiaceat lateri minori, fiat illi æqualis angulus B A E, ſin autem detur angulus adiacens lateri maiori,ſit B A E illius complementum: & ducatur recta C E. Demum interuallo E A, centro E, deſcribatur arcus ſecans rectam C B in F, & ducatur recta E F; erit enim triangulum quæſitum C E F; angulus enim C F E æqualis angulo F A E, ex 5.lib.1.Elem.vel eſt æqualis dato, vel dati anguli complemento, & propterea angulus ad C eſt datus.Latera autem C E, & E F habere datam conditionem, & eorum quadrata ſimul ſumpta æqualia eſſe quadrato lineæ A B, hoc eſt D inuentæ, ſic oſtenditur,

Quia A E B eſt angulus in ſemicirculo, eſt rectus, ex 31.lib.3. Elem. & angulus B A E ex conſtructione eſt complementum anguli ad C, erit angulus A B E æqualis angulo C, ac propterea, per 6.lib.1.,linea B E æqualis eſt lineæ C E,& linea E A æqualis eſt lineæ E F: igitur quadrata linearum C E, & E F æqualia ſunt quadratis linearum B E,& E A, hæc autem, ex 47.lib.1.Elem. æqualia ſunt quadrato lineæ A B; eidem igitur quadrato æquale eſt aggregatum quadratorũ è lateribus C E, & E F, quod proinde ad planum datum M quadr. habet datam Rationem R ad S.

Verùm,

Verùm, cum incerta ſit ſpecies anguli verticalis, ſi acutus fuerit, vel obtuſus, methodus hæc, quę rectangulo triangulo conuenit, vſum non habet: quamuis enim poſita differentia Z, ſcilicet C A, & conſtituto angulo dato, vel A C E, vel B A E, ita aſſumi oporteat punctum E, vt duo latera C E, & E A accommodari poſſint in ſemicirculo deſcripto circa inuentam lineam D, cum tamen nihil adhuc certi deprehenderim, quod omnibus caſibus ſatisfaciat, ſatiùs duco rem aliter abſoluere.

Dato Angulo, qui lateri maiori opponitur, ducta C F, & aſſumpta C A æquali ipſi Z, & facto angulo dato F A E, producatur recta E A, & ex C in illam cadat perpendicularis C H. Quare datur A H, & ſit H, atque C H ſit C, A E autem eſt A ex hypotheſi. Igitur quadratum lateris C E per 47. lib. 1. Elem: æquale eſt quadratis C H, & H E ſimul ſumptis, & quadratum eiuſdem lateris C E eſt D quadr. — A quadr. Quadratum lateris C H eſt C quadr.; quadratum lateris H E, per 4. lib. 2. Elem., eſt A quadr. † 2 H in A † H quadr. cui ſi addatur C quadr. ęquabitur hęc ſumma ipſi D quad. — A quadr. Facta Antitheſi 2 A quadr. † 2 H in A æquatur D quadr. — H quadr. — C quadr. & omnibus

C 2 per

per 2. diuiſis, A quadr. † H in A æquatur $\frac{1}{2}$ D quadr. — $\frac{1}{2}$ H quad. — $\frac{1}{2}$ C quadr. Quare inuenitur A, ſcilicet latus A E, & ex E ducta recta E C dat latus maius, atque adeo E F eſt latus minus æquale ipſi A E. Vt res hæc clariùs explicetur, Ratio R ad S ſit 37. ad 16; Z, hoc eſt C A, ſit 6, planum datum ſit 128. Ergo vt 16 ad 37, ita 128 ad 296 aggregatum quadratorū è lateribus, videlicet D quadr. Angulus datus ſit grad. 60. ac propterea angulus H A C ad verticem illi eſt æqualis, & nota hypothenuſa C A in triangulo rectangulo A H C. Ex his datis, per Trigonometriam eſt H A 3, H C 5 $\frac{196}{1000}$; igitur H quadr. 9. & eius ſemiſſis 4 $\frac{1}{2}$; C quadr. 26 $\frac{998}{1000}$, eius ſemiſſis, 13 $\frac{499}{1000}$; ac propterea ex $\frac{1}{2}$ D quadr., videlicet ex 148. auferatur 4 $\frac{1}{2}$, & 13 $\frac{499}{1000}$, hoc eſt 18, remanēt 130: huic addatur $\frac{1}{4}$ H quadr., ſc. quadr. ſemiſſis coëfficientis H, videlicet 2 $\frac{1}{4}$, ſumma eſt 132 $\frac{1}{4}$ hoc eſt $\frac{529}{4}$, cuius radix $\frac{23}{2}$; quæ ſi multetur ſemiſſe coëfficientis H, nimirum 1 $\frac{1}{2}$, remanet

net A 10,cuius quadratum 100 demptum ex D quadr. 296 relinquit 196, cuius Radix 14 eſt quantitas reliqui lateris C E.

Quod ſi Angulus datus lateri minori opponatur,ſtatuatur illi æqualis A C E, & ex A in rectam C E cadat perpendicularis A P; nam ſi ponatur eſſe triangulum C E A, lateris A E quadratum æquale eſt quadratis A P, & P E,ex 47.lib.1.Elem.& idem quadratum A E æquale eſt D quadrato minus quadrato ipſius C E. Quare P E ſit A,P A ſit P,P C ſit C;igitur quæſitum latus maius eſt C † A, cuius quadratum auferendū eſt ex D quadr. Igitur A quadr. † P quadr. æquatur D quadr.— A quadr.— 2 C in A— C quadr.:Et facta Antitheſi, erit 2 A quadr. † 2 C in A æquale D quadr.— C quadr.— P quadr.: & omnibus per 2 diuiſis, A quadr. † C in A ęquatur $\frac{1}{2}$Dquad. —$\frac{1}{2}$ C quad.— $\frac{1}{2}$P quad. Quapropter inuenitur A, ſcilicet P E addenda lineæ C P, vt habeatur totum latus C E.

Sed hic iterum ex numeroſa reſolutione methodi propoſitæ veritas innoteſcat. Primùm in triangulo C P A rectangulo data eſt hypothenuſa C A æqualis datæ 26, & datus eſt angulus P C A gr.38.m.13. inuenitur ergo

go per Trigonometriam latus P A $3\frac{712}{1000}$, & latus P C $4\frac{714}{1000}$. Deinde ex $\frac{1}{2}$ D quadr. hoc eſt ex 148, auferatur $\frac{1}{2}$ C quadr. $11\frac{111}{1000}$, & $\frac{1}{2}$ P quadr. $6\frac{889}{1000}$, & remanet 130; cui addatur quadratum ſemiſſis coëfficientis C, nimirum $5\frac{55}{100}$, & eſt ſumma $\frac{13555}{100}$, cuius radix eſt $\frac{116}{10}$, ex qua auferre oportet ſemiſſem coëfficientis C $2\frac{3}{10}$; & reſiduum $9\frac{3}{10}$ eſt A, videlicet P E; huic addatur P C $4\frac{7}{10}$, eſt tota C E 14. cuius quadratum 196. demptum ex D quadr. 296. relinquit minoris lateris A E quadratum 100. & eſt A E 10, cui æquale eſt latus minus A F.

PROBLEMA XII.

Data (Z) differentia Segmentorum Baſeos, vnà cum Ratione (R ad S), quam habet quadratum aggregati laterum circa verticem aſſumens datum planum (N quad.) ad datum itidem planum (M quad.), datoque alterutro angulorum ad baſim, reperire triangulum.

Sit

SIt laterum aggregatum A, eiuſque quadratum A quad. aſſumens N quadr. æquale dato plano cuicumque, & erit vt R ad S ita A quad. + N quad. ad M. quad. æquale alteri dato plano. Ergo A quadr. in S + N quadr. in S æquatur M quadr. in R, & per Antitheſim A quad. in S æquatur M quadr. in R — N quadr. in S, & per Paraboliſmum facta communi applicatione ad S, A quadr. æquatur $\frac{M\ quad.\ in\ R}{S}$ — N quad. Tum ad inueniendum planum æquale Fractioni, fiat vt S ad R, ita M quadr. ad aliud, quod ſit D quadr. Et quia ratio M ad D eſt ſubduplicata Rationis ſuorum quadratorũ, etiam eſt ſubduplicata Rationis S ad R; ideo inter S & R inueniatur media proportionalis T, & fiat vt S ad T, ita M ad D: eſt igitur D quadr. idem ac Fractio $\frac{M\ quad.\ in\ R}{S}$. Quare A quadr. æquatur D quadr. — N quadr. ac propterea circa D deſcripto ſemicirculo, in eo accommodetur N, & erit A quæſitum aggregatum laterum. Eſt itaque data Ratio aggregati laterum A ad lineam datam N; igitur per Problem. 2. inuenitur triangulum.

ADDITAMENTVM ARITHMETICVM.

QVoniam in aliquorum Problematum explicatione, vt res clariùs eluceſceret, facta eſt linearum reſolutio in numeros, placet hic, mantiſſæ loco, indicare, quid in ſingulis fieri oporteat, vt latera quæſiti trianguli inueniantur. Notis autem lateribus, & vno ſaltem angulo, baſis innoteſcit, & trianguli altitudo, ex qua, & Baſis ſemiſſe conficitur trianguli area, vt notum eſt.

AD PROBLEMA I.

SIt data differentia Segmentorum Baſeos O I 6, Ratio lateris minoris H L ad differentiam laterum N I ſit vt 5 ad 2, vel lateris maioris L I ad eandem differentiam vt 7 ad 2: igitur latera ſunt, vt 5 & 7. Detur angulus L H I grad. 60: fiat vt L I 7 ad L H 5, ita Sinus grad. 60. 86602 ad 61858 Sinum anguli H I L grad. 38. m. 12. ſec. 50. Quare angulus verticalis I L H eſt grad. 81. m. 47. ſec. 10, cuius Sinus 98974 dat baſim H I partium 8, quarum L I eſt 7.

Cum verò ex Corollario 1 prop. 36. lib. 3. Elem. rectangulum ſub tota I P, hoc eſt laterum aggre-

aggregato, & N I, hoc eſt, laterum differentia, æquale ſit rectãgulo ſub baſi H I, & ſegmentorum baſis differentia O I, erit per 16. lib. 6. Elem. vt baſis 8 ad laterum aggregatũ 12, ita laterum differentia 2 ad Segmentorum baſis differentiam 3. Atqui O I data eſt 6; igitur vt 3 ad 6, ita 8 ad 16, ita 5 ad 10, ita 7 ad 14: igitur ex data differentia Segmentorum baſis, & dato angulo, & data Ratione lateris ad differentiam laterum, inuenta ſunt latera, & anguli trianguli quæſiti; nimirum baſis 16, latera 10, & 14.

Quod ſi angulus datus eſſet H I L gr. 38. m. 12. ſec. 50. eadẽ vtendũ eſt methodo, vt cõſtat.

AD PROBLEMA II.

DAta differentia Z ſit 6, Ratio R ad S ſit 12 ad 7. Data linea D ſit 14: igitur vt 7 ad 12, ita 14 ad 24 aggregatum laterum. In primo caſu datur angulus B A E gr. 38. m. 12. ſec. 50. comprehenſus à lateribus datis A E 6, & A B 24: Igitur vt horum crurum aggregatum 30 ad eorum differentiam 18, ita ſemiſummæ angulorum ad baſim gr. 70. m. 53. ſec. 35. Tangens 288670, ad 173203 Tangentem grad. 60 differentiæ auferendæ ex ſemiſumma illa, vt habeatur angulus minor A B E gr. 10. m. 53. ſec. 35. & addendæ,

vt habeatur angulus maior A E B gr. 130. m. 53. ſec. 35: ex quo notus redditur, qui eſt illi deinceps angulus B E I gr. 49. m. 6. ſec. 25: cui ſi addatur angulus B E G æqualis, per 5. lib. 1. Elem. angulo inuento E B G grad. 10. m. 53. ſec. 35, totus angulus G E I (cui æqualis eſt angulus G I E) eſt grad. 60; & hic eſt alter angulus ad baſim quæſiti trianguli, ex quo innoteſcit, & verticalis A G I.

Ad diſtinguenda verò latera, quorum aggregatum A B iam notum eſt, cum G B, & G I lineæ æquales ſint, inuenitur G B in triangulo rectangulo B F G, ſi prius in triangulo A E B inueniatur baſis E B, cuius ſemiſſis eſt F B. Quare vt anguli E B A grad. 10. m. 53. ſec. 35. Sinus 18897, ad Anguli A dati gr. 38. m. 12. ſec. 50. Sinum 61860; ita latus A E 6 ad baſim E B $19\frac{64}{100}$; cuius Semiſſis F B eſt $9\frac{82}{100}$. Quare fiat vt anguli F B G Sinus complementi 98197 ad Radium 100000, ita F B $9\frac{82}{100}$ ad G B 10; igitur G A 14.

In ſecundo caſu datur M E 6, E K 24, angulus C E K grad. 60: quare notus angulus M E K. Semiſumma angulorum ad baſim M K eſt grad. 30. Quare vt laterum M E, E K ſumma 30 ad eorum differentiam 18, ita grad.

30.

30. Tangens 57735 ad 34641 Tangentem grad. 19. m. 6. ſec. 24. $\frac{1}{8}$ Semidifferentiam angulorum ad baſim. Quare angulus G M E eſt gr. 38. m. 12. ſec. 48. $\frac{3}{4}$, ac proinde angulus M G E gr. 21. m. 47. ſec. 11. $\frac{1}{4}$ Igitur vt anguli M G E Sinus 37114 ad anguli G M E Sinum 61859, ita M E 6, ad E G 10, & remanet G K 14. Vbi vides nihil officere exiguam differentiam in minutis ſecundis, hic enim minuta ſecunda 48 $\frac{3}{4}$ deficiunt à ſec. 50. quæ in primo caſu poſita ſunt.

AD PROBLEMA III.

SIt eadem data differentia Z 6, linea B demenda ex aggregato laterum ſit 8, linea D ſit 9. Ratio data R ad S ſit 32 ad 18. Igitur conuertendo vt 18 ad 32, ita 9 ad reſiduum aggregati laterum dempta B, videlicet ad 16; cui ſi addatur B 8, eſt laterum aggregatum 24. Reliqua per antecedens Problema ſoluuntur.

AD PROBLEMA IV.

NIhil hic addendum; neque enim differt à primo, niſi quatenus Conſequens Rationis in illo, hic ſit Antecedens.

AD PROBLEMA V.

DAta ſit Z 6, Ratio R ad S $2\frac{2}{5}$ ad 1. igitur latus minus ad differentiam laterum eſt vt 1 ad $\frac{2}{5}$, & latus maius ad eandem differentiam eſt vt $1\frac{2}{5}$ ad $\frac{2}{5}$ Soluitur ergò per Problema 1.

AD PROBLEMA VI.

QVæ ibi dicta ſunt, ſatis eſſe poſſunt ad inueniendam in numeris quantitatem laterum. Solùm monendus eſt Analyſta ſatius eſſe tribuere 1 ℞ minori lateri, quàm maiori, vt minùs à vero aberret, cum ad multiplicandū, vel diuidendū numerum inuentū vtatur ſola prima figura radicis dati plani. Quod ſi datum planum tam ingens eſſet, vt eius Radix quadrata pluribus figuris conſtaret, vtere prioribus, relicta vltima. Verùm vt

examines,

examines, an iuſta ſint latera ſic inuenta in triangulo, quod pro baſi habet datam Z differentiam ſegmentorum Baſeos; quære ex datis, & inuentis, baſim trianguli quæſiti. Deinde fiat vt baſis inuenta ad aggregatum laterum inuentorum, ita eorundem laterum differentia ad aliud; Si enim proueniat numerus datæ Z differentiæ æqualis, indicium erit, rem totam bene proceſſiſſe.

Vnum præterea obſeruare oportet in multiplicatione numeri inuenti per 1 ℞; quod ſcilicet addenda eſt figura vltimo loco, habitâ ratione fractionis, quæ numero integro adhæret, vt propiùs accedas ad Sinum præciſum anguli quęſiti. Sic in exemplo allato inuentus eſt numerus 3711 $\frac{1}{2}$ ℞, ſi adderetur 0, eſſet 37110 Sinus gr. 21. m. 47. ſed quia adhæret fractio $\frac{1}{2}$, vt accedam ad minuta ſecunda, accipio Sinum 37114, aut 37115 gr. 21. m. 47. ſec. 10.

Demum ſi animaduerteris datum angulum ad baſim valdè acutum eſſe, & datam differentiam Z eſſe valdè paruam, comparatam cum Radice dati vel inuenti plani ſub lateribus, indicium eſt latera magis differre longitudine inter ſe, atq; proinde mediam proportionalem

tionalem L magis diſtare à longitudine lateris minoris, quod ponitur eſſe 1 ℞:ac propterea minùs accuratè inuenitur, quod quæritur. Contra verò ſi angulus ad baſim datus non ſit adeò acutus, & data differentia Z propiùs accedat ad longitudinem mediæ L, ſecuriùs operaberis ponēdo latus minus 1 ℞.

Vel etiam hoc pacto inueſtigentur latera, ſi nimis incerta videatur propoſita methodus; Sit A B 6 æqualis datæ differentiæ Z, B I æqualis ℞ 140, nimirum $11\frac{83}{103}$. Interuallo B I deſcribatur arcus centro B, & eodem interuallo deſcribatur arcus centro A. Tum fiat dato angulo æqualis angulus A B D gr. 38. m. 12. ſec. 50. & ducantur rectę A C, & A D. Quia B C æqualis ipſi B I eſt media proportionalis inter vera latera, certum eſt quod latus maius trianguli quæſiti maius eſt illa, latus verò minus eadem minus eſt; ac propterea latus maius excedit B C, latus verò minus deficit ab A D. Quare vera latera trianguli quæſita concurrunt inter C, & D.

In triangulo A B C datur A B 6, B C $11.\frac{83}{109}$ & angulus comprehenſus A B C gr. 38. m. 12. ſec. 50. Vt anguli ad baſim inueniantur, eorū ſemiſumma eſt gr. 70. min. 53. ſec. 35.

Igitur

Igitur vt laterum ſumma 17 $\frac{83}{100}$ ad eorum differentiam 5 $\frac{83}{100}$, ita ſemiſummæ Tangens 288669 ad 94177 Tangentem grad. 43. m. 17 differentiæ, quæ additur, & demitur ſemiſummæ. Eſt ergò angulus B A C gr. 114. m. 10. ſec. 35, & B C A gr. 27. m. 36. ſec. 35. Quare vt gr. 27. m. 36. ſec. 35. Sinus 46344 ad gr. 38. m. 12. ſec. 50. Sinũ 61860, ita A B 6, ad A C 8 $\frac{8}{1000}$. Atqui ſi ducatur A C, in C B, productum 94 $\frac{735}{1000}$ deficit à rectangulo 140, quod fit à lateribus veris, defectu 45 $\frac{265}{1000}$.

Similiter in triangulo B D A latus B A datur 6, A D eſt 11 $\frac{83}{1000}$; ergo vt A D ad A B, ita anguli B dati Sinus 61860, ad 31377 Sinum anguli B D A gr. 18. m. 17. ſec. 12. Igitur angulus B A D eſt gr. 123. m. 29. ſec. 58, cuius Sinus eſt 83388; ac propterea vt Sinus anguli A D B ad Sinum anguli B A D, ita A B 6 ad B D 15 $\frac{945}{1000}$ Ducatur B D in D A, productum 188 $\frac{629}{1000}$ excedit 140 per 48 $\frac{529}{1000}$

His habitis, per Regulam duplicis falſæ poſitionis veritatem inquiro. Et quia pro latere maiori prima poſitio fuit B C 11 $\frac{8}{10}$ cum er-

rore

rore minùs 45 $\frac{2}{10}$, Secunda poſitio fuit B D 15 $\frac{9}{10}$ cum errore plus 48 $\frac{6}{10}$, prouenit lateris maioris vera quantitas 13 $\frac{77}{100}$, hoc eſt 14 ob neglectas fractiunculas.

11.8. —	45.2.	718.68.
15.9. —	+ 48.6.	57348.

Per 93.8 diuide 129216. Quotiẽs 13.77. Et quia pro latere minori prima poſitio fuit A C 8 cum errore minus 45. 2. Secunda Poſitio fuit A D 11. 8. cum errore plus 48. 6, prouenit latus minus partium 9 $\frac{83}{100}$.

8. —	45.2.	533.36.
11.8. —	+ 48.6.	388.80.

Per 93.8 diuide 922 16. quotiẽs 9. 83. (quarum A B eſt 6) hoc eſt 10. Et latera quęſita trianguli eſſe 14, & 10, quia inter hæc media proportionalis eſt ℞ 140, manifeſtũ eſt. Hoc idem opus duplicis falſæ poſitionis exerceri poteſt in lineis. Sit enim I B vera media inter vera latera, æqualis ſcilicet inuentæ L. Inter A C, & A B inueniatur media B E; ergò ſub his falſis lateribus rectangulum deficit à vero per quadratum E I. Item inter A D, & D B inueniatur media B G, cuius quadratum excedit quadratum B F, hoc eſt

B I, per quadratum F G. Primus error ſit H quad., Secundus N quad., ſumma errorum eſt M quad.

Pro latere minori prima Poſitio fuit A C, ſecunda A D; igitur A C in ſecundum errorem eſt Cubus primæ duarum mediarum inter A C, & N: & A D in primum errorem eſt cubus primæ mediæ inter A D, & H (quocumque tandem modo duæ mediæ reperiantur) Horum Cuborum ſumma applicata ad M quad. ſummam errorum, dabit longitudinem P quæſitum latus minus trianguli.

Sed facilitatis causà prima Poſitio ſit C, Secunda D. Igitur $\frac{C \text{ in } N \text{ quad.}}{M \text{ quad.}} \dagger \frac{D \text{ in } H \text{ quad.}}{M \text{ quad.}}$ eſt vltimum. Fiat vt M quad. ad N quad. ita C ad Z, & vt M quad. ad H quad. ita D ad X, nam X † Z, hoc eſt P linea eſt latus minus quęſitũ. Simili methodo inueniendum etiam latus maius manifeſtum eſt, quia plura addantur.

AD PROBLEMA VII.

Quæ huc ſpectant, ſatis explicata ſunt, vt inueniatur Ratio laterum inter ſe; ſubducto enim minori ex maiore fit reſidua illorum differentia, ac proinde nota eſt

Ratio

Ratio alterutrius lateris ad differentiam; ex qua & cęteris datis per Probl. 1. ſatisfit Quęſtioni.

AD PROBLEMA VIII.

DAta Differentia Z ſit 6. Ratio R ad S ſit 25 ad 24. Igitur tres proportionales ſunt 24 — 1 ℞: 1 ℞: 25. Factũ ex prima in tertiam eſt 600 — 25 ℞; æquatur quadrato ſecundæ, ſcilicet 1 quadr. & per Antitheſim 1 quadr. † 25 ℞ æquatur 600. Huic adde $\frac{1}{4}$ quadrati coëfficientis 25, hoc eſt 156 $\frac{1}{4}$, & eſt ſumma 756 $\frac{1}{4}$. cuius radix $\frac{55}{2}$, ex qua auſertur 12 $\frac{1}{2}$ ſemiſſis coëfficientis, & remanet 15 pretium 1 ℞. Eſt igitur prima 9. Secunda 15. tertia 25. Quare vt 9. ad 15. ita Z 6 ad 10 latus minus quæſiti trianguli.

Hinc patet quadratum lateris 100. ad rectangulum ſub 10 † 6. & 6, hoc eſt ad 96, eſſe vt R ad S, hoc eſt vt 25. ad 24.

In triangulo igitur G B A datur vnus angulus ſiue G, ſiue B, datur latus G B 6, & datur latus G A inuentum 10; per Trigonometriam ergo innoteſcit & reliquum latus A B, 14, & demum totum triangulum F B A.

Simili-

Simili ratione detur differentia Z 6, Ratio R ad S 49 ad 30, quam habeat quadratum lateris maioris ad rectangulum ſub aggregato ex prędicta differentia, & latere eodem maiori: 30 − 1 ℞ eſt prima, 1 ℞ eſt ſecunda, 49 eſt tertia: demũ æquatio eſt inter 1 Q † 49 ℞, & 1470; vnde exurgit 21 pretiũ 1 ℞; & ſunt tres proportionales 9.21.49. Quare vt 9 ad 21 ita Z 6 ad 14 latus maius quæſiti trianguli, cuius lateris quadratum 196 ad rectangulum ſub 14 † 6, & 6, hoc eſt ad 120 habet Rationem datam 49 ad 30.

Cum itaque in triangulo A B G nota ſint latera A B, & B G, vna cum alterutro angulorum, notus fiet reliquus angulus ad G B per Trigonometriam: ac proptereà in Triangulo quæſito F A B cum noti ſint ambo anguli ad baſim F B, & notum ſit latus alteri eorum oppoſitum, videlicet A B, inuenitur reliquum latus, & Baſis.

AD PROBLEMA IX.

DAta Differentia ſegmentorum baſis Z ſit 6, eius quadratum eſt 36, quod ſuperatur à quadrato aggregati ex Z & latere minori tali exceſſu, vt hoc quadratum ad exceſſum ſit in Ratione R ad S, hoc eſt 64 ad 55, quorum

rum differentia eſt 9. Igitur vt 9 ad 55, ita Z quad. hoc eſt 36, ad 220, cui ſi addatur 36, fit 256 quadratum illius aggregati, cuius radix eſt 16: igitur latus minus plus Z eſt 16; auferatur Z 6, remanet 10 latus minus.

At ſi ſumatur quadratum lateris maioris plus differentia Z ad exceſſum ſupra Z quadr. & Ratio ſit 100 ad 91, fiat vt horum differentia 9 ad 91, ita Z quad. 36 ad 364, cui ſi addatur Z quad. 36. quadratum eſt 400, à cuius radicè 20 ſi dematur Z 6, reliquum eſt latus maius 14.

Cum itaque in triangulo B G C data ſit B C æqualis ipſi Z, & alterutrum latus ſit inuentum, datuſque ſit alteruter angulorum ad B, nota fiunt quæ adhuc latent, per Trigonometriam, atque adeò etiam quæſitum triangulum H G C innoteſcit.

Quod ſi retentà priori Ratione 64 ad 55, latus quod deprehenditur eſſe 10, ſtatuatur latus maius trianguli E D C, & B C, hoc eſt Z data, ſit 6, anguluſque comprehenſus ſit idē grad 38. m. 12. ſec. 50; fiat vt ſumma laterum 16 ad differentiam eorum 4, ita ſemiſummę angulorum ad baſim grad. 70. m. 53. ſec. 35. Tangens 288670 ad 72167 Tangentem gr. 35. m, 49. differentiæ addendæ ſemiſummæ angulorum ad baſim, vt habeatur obtuſus

gr. 106.

gr.106.m.42.ſec.35.Quare lateri maiori inuento oppoſitus angulus in triangulo D E C eſſet gr.73.m.17.ſec.25. & proueniret latus E D 6 $\frac{458}{1000}$ Ex quibus conſtat non eandem eſſe poſſe Rationem R ad S, ſi inquiratur latus maius, ac ſi inquiritur latus minus in eodem triangulo.

AD PROBLEMA X.

INquiratur pars quinta rectanguli ſub lateribus aſſumens planum N quad. 40, & habeat ad planum M quad. 30, Rationem R ad S, quæ ſit 34 ad 15. Ducatur 30 in 34, & productum 1020 diuidatur per 15; quotiens 68 eſt ſumma ex plano 40, & quinta parte rectanguli ſub lateribus; auferantur 40, remanet 28 pars quinta quæſita. Ducatur hæc per 5, totum rectangulum ſub lateribus eſt 140. Eſt igitur nota Ratio 140 ad 30 rectanguli ad datum planum, & reliqua ex Problemate 6. abſoluuntur.

AD PROBLEMA XI.

SAtis eſſe poſſunt ibi dicta, & explicata; neque enim peculiari explicatione indigent

quæ

quæ dicta ſunt de triangulo quæſito, ſi rectangulum eſſe ponatur: quia ſi angulus C E F eſt rectus, & vt R ad S ita aggregatum quadratorum ex lateribus ad datum planum M, conuertendo eſt vt S ad R ita M planum ad ſummam quadratorum è lateribus: Eſt autem, ex 47 lib. 1. Elem. Hypothenuſæ C F quadratum illi ſummæ æquale, ac proinde & eius Radix, quantitas lineæ C F, nota eſt. Quare in triangulo rectangulo data Hypothenuſa, & alterutro laterum adiacentium, inueniuntur latera per Trigonometriam.

AD PROBLEMA XII.

PLanum, quod aſſumitur à laterum aggregati quadrato, ſit 256, aliud verò planum 208 ſit Conſequens Rationis R ad S, hoc eſt 4 ad 1: igitur vt 1 ad 4 ita 208 ad 832; hinc auferatur planum aſſumptum 256, reſiduum 576 eſt quadratum aggregati laterum, cuius radix 24 eſt ipſum aggregatum laterum. Datorum planorum, ſiue N quadr. aſſumpti, ſiue alterius M quadr. eruatur radix quadrata, illius quidem 16; huius verò $14\frac{42}{100}$, & erit data Ratio aggregati laterum

ad

ad datam lineam, ſiue 24 ad 16, ſiue 24 ad 14 $\frac{42}{100}$, & per Problema 2. reliqua perficientur.

Et hæc quidem breuiter dicta ſufficiant, ne propoſita Problemata ſolutione careant: in quorum demonſtratione minuta ſingula perſequi ſuperuacuum duxi, cum omnibus vel leuiter Mathematica ſcientia aſperſis manifeſta ſint. Placuit autem in vno eodemque triangulo exempla omnia proponere, vt clariùs methodi veritas innoteſcat, vbi omnia ſibi mutua conſenſione reſpondent.

FINIS.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE

54/2
BIBLIOTECA
2